

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

21 июля 2021 (4-й поток)

ВАРИАНТ 214

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.
2. Бобр доплывает от своей норы вниз по реке до основной рощи за три минуты. Подкрепившись, он плывёт обратно к своей норе, на что у него уходит четыре минуты. Во сколько раз собственная скорость бобра превышает скорость течения? (Собственную скорость бобра считать постоянной).
3. Решите уравнение $\cos 4x + \cos 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
4. Решите неравенство $\log_2 x + \log_4 x \leq \log_2 3 \cdot \log_x 6$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Известно, что $AB = BC = 1$, что площади треугольников AKC и BCL равны и что около четырёхугольника $AKML$, где M — точка пересечения отрезков BL и CK , можно описать окружность. Найдите все возможные значения AC .
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
$$\left(\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3-2x-x^2}\right)\left(\sqrt{a-x^2} - \sqrt{3+2x-x^2}\right) = 0$$
 имеет ровно одно решение.
7. Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на AB , что плоскости ABC и ABD перпендикулярны и что $AD = DC = CB$. Найдите угол между прямыми AD и CB .