

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 203.

1. Найдите целое число, задаваемое выражением:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2.$$

2. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 9, а сумма последних десяти членов равна 11. Найдите сумму $a_6 + a_7 + \dots + a_{14} + a_{15}$.

3. Решите уравнение:

$$\cos x \cdot (2 \cos x - \cos 3x) = 1.$$

4. Решите неравенство:

$$3^x - 2^{x+1} \leq \sqrt{2 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 2^{2x+3}}.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса AL и высота CH . Найдите косинус угла $\angle BAC$, если $HL \parallel AC$.

6. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' . Найдите объем многогранника с вершинами, являющимися серединами ребер $AB, AD, AA', CC', C'B', C'D'$, если известно, что ребро куба равно 1.

7. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x \cos a + y \sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) , отличное от $(0, 0)$.